УДК 336.76.066
ББК 65.054

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ БАШЕЛЬЕ К СОВРЕМЕННЫМ ОПЦИОННЫМ КОНТРАКТАМ

А.В. Зиненко[1]

(Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М.Ф. Решетнева)

Работа Луи Башелье "Теория спекуляции", написанная в 1900 году была незаслуженно забыта и возвращена к жизни только через более чем сорок лет после ее опубликования. В работе рассматривалось движение цен французских облигаций - вечной ренты и ренты на срок. В настоящее время эта работа считается основой современной инвестиционной теории. Основное новаторство Башелье состоит в применении физических уравнений к динамики финансового рынка и в предположении о случайном движении котировок. При этом последователями Башелье упускается тот факт, что основным предметом исследования Башелье было определение цены ренты на срок - аналогу современного биржевого опциона колл.

В данной работе мы применили формулы Башелье для определения стоимости ренты на срок к некоторым современным российским опционам колл и сравнили полученные результаты с фактическими премиями.

Ключевые слова: Нормальное распределение, вечная рента, рента на сок, опцион колл.

1. Введение.

В настоящее время, говоря о формах и методах спекуляции и инвестирования на рынке ценных бумаг, невозможно не упомянуть о производных контрактах. Сам механизм обращения таких контрактов подразумевает мощный спекулятивный потенциал. Это связано с тем, что для покупки производного контракта и инвестору не нужно вносить всю его стоимость, а только ее часть - маржу (как правило, маржа составляет 50 процентов). Таким образом, доходность на вложенные средства становится в два раза больше, причем как положительная, так и отрицательная [1,11].

Наиболее распространены два вида производных контрактов - фьючерс и опцион. Если спекулятивный потенциал фьючерса составляет только маржинальный механизм, то в случае опциона все интереснее. Помимо свойств фьючерса опцион обладает важным свойством: покупатель опциона ограничивает свои убытки, и за предоставление такой возможности опцион имеет свою собственную стоимость - премию. На момент покупки опциона можно делать какие - либо выводы о будущих доходах на основании текущей цены спот и цены исполнения опциона (цены страйк). Для покупателя опциона колл хорошо, если цена спот превышает цену страйк - в этом случае говорят, что опцион "в деньгах" или имеет внутреннюю стоимость. Опцион пут является опционом "в деньгах" или имеет внутреннюю стоимость, если наоборот, цена страйк превышает цену спот.

Очевидно, что премия по опциону "в деньгах" будет выше, чем по опциону "без денег", так как риск понести убыток у продавца такого опциона больше. Отсюда можно сделать вывод об обратной зависимости цен на опционы пут и колл[16].

На современных биржах и внебиржевых торговых площадках цены опционов определяются по модели Блека - Шоулза. Эта модель позволяет определить премию по опциону колл (премия по опциону пут определяется из уравнения паритета) при имеющихся данных о цене спот, цене страйк, сроке до окончания опциона и ставке дисконтирования. Основной исходной предпосылкой модели Блека - Шоулза является допущение о том, что цены на базовый актив (или по крайней мере логарифмические доходности), подчиняются нормальному закону распределения [14].

Постулат, который лежит в основе современной инвестиционной теории, на котором построены три базовые инвестиционные модели - модель формирования оптимального портфеля Марковитца, модель ценообразования рынка капиталов Шарпа, модель ценообразования опционов Блека- Шоулза, был сформулирован и проверен экспериментально еще в 1900 году. В этом году

[1] *Анна Викторовна Зиненко, кандидат технических наук, доцент,(anna-z@mail.ru)*

французский математик Луи Башелье защитил докторскую диссертацию под названием "Теория спекуляции". Его работа не была должным образом оценена и более 40 лет о ней никто не вспоминал. Только в 40-х годах 20го века темой случайных блужданий биржевых котировок заинтересовался физик и математик Маури Осборн. Затем уже в 50-х стали проводить исследования и строить модели Гарри Марковитц, Уильям Шарм, Пол Самуэльсон, Юджин Фама и другие. Тогда диссертация Башелье вышла из небытия[5,6].

Но и по сей день о Башелье говорят только как о пионере применения физических уравнений к фондовым котировкам[8,9,10]. Сама модель Башелье не преподается на курсах финансовых инвестиций и не известна широкому кругу финансовых аналитиков. И совсем мало кому известно, что основной темой работы Башелье было не исследование движения котировок ценных бумаг, а ***ценообразование опционов***. В данной работе мы рассмотрим модель Башелье и применим ее к современным российским опционам колл.

2. **Основные положения модели Башелье**.

Предметом исследования Башелье был рынок французских правительственных облигаций, а если точнее так называемой ренты [13].

Рента - это обязательство государства стоимостью сто франков выплачивать 3% в год от номинала ренты (то есть 3 франка в год) на протяжении бесконечного периода времени. Выплаты производились 4 раза в год - в марте, июне сентябре и декабре, соответственно по 75 сантимов за квартал. Нетрудно вывести график рыночной стоимости ренты по таким данным. Если рента будет приобретена например 1 февраля, то до выплаты 75 сантимов останется не три месяца, как при покупке первого января, а только два. 75 сантимов за квартал - это 25 сантимов месяц, следовательно рента 1 февраля будет стоить на 25 сантимов дороже, чем 1 января, а 1 марта - на 25 сантимов дороже, чем 1 февраля. Но к 1 апреля опять до выплаты останется ждать три месяца, поэтому рыночная стоимость ренты снова упадет на 75 сантимов. График рыночной стоимости вечной ренты напоминает зубчатую пилу, его примерная схема показана на рисунке 4.1.

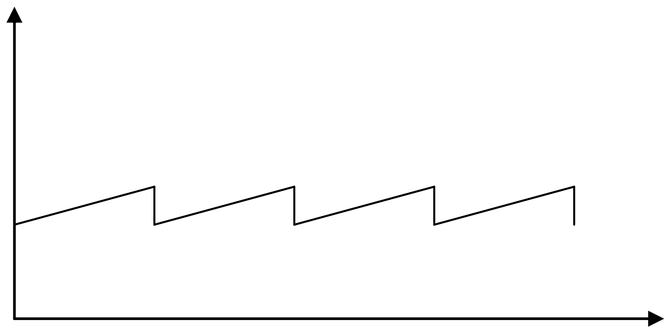

Рис. 1. График детерминированной составляющей рыночной цены вечной ренты

Но в такой интерпретации колебаний рыночной цены не был ничего нового, изменение стоимости денег во времени, наращение и дисконтирование денежных потоков так или иначе в то время уже применялись. Новаторство Башелье, которое стало опорой для современной инвестиционной теории, заключалось в разделении изменения рыночного курса ренты на детерминированную и случайную составляющие. Случайная составляющая возникла от того, что бессрочная рента торговалась на бирже, соответственно ее курс так или иначе колебался. Эти колебания были небольшими - 12 - 13 сантимов за сутки (чуть более 0,1%).

Поскольку во времена Башелье бессрочная рента была основным французским фондовым инструментом, существовало несколько вариантов "игры", которые все были им рассмотрены. Бессрочную ренту можно было приобрести на срок. В этом случае покупатель ренты имел дело не с государством, а с продавцом ренты, который через определенный срок был обязан выкупить ренту обратно. Здесь помимо дисконтированной стоимости ренты (которая по сути своей детерминирована), покупатель выплачивал продавцу некое вознаграждение - репорт. Величина репорта носила как раз в основном случайный характер. Башелье оценивал его колебания в пределах 0,2% от стоимости ренты.

Наиболее сложный вариант игры - это некий аналог опциона колл, который и является предметом нашей работы. Помимо покупки ренты на срок предусматривалась покупка ренты на срок с премией. Это означало, что покупатель ренты, выплатив продавцу некое вознаграждение (на современном языке это называется премия, у Башелье - écart - прибавка), был застрахован от любых убытков. То есть если к моменту ликвидации (истечению срока, на который была куплена рента), рыночная цена ренты была ниже, чем цена ренты с репортом на момент заключения сделки, то эта разница компенсировалась продавцом ренты.

Основной задачей Башелье ставил определение величины прибавки или премии [мандельброт]. Согласно его модели, прибавка рассчитывалась из следующего уравнения.

(1) $$h + m \int_m^{\infty} p(t,x)dx = \int_m^{\infty} x\, p(t,x)dx\,,$$

где

$h + m$ - величина прибавки

$p(t,x)$ - плотность нормального распределения.

$$p(t,x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,,$$

где $\mu = 0$ и $\sigma = k\sqrt{2\pi t}$.

Сначала Башелье из ретроспективных данных находил параметр k, затем подставлял его в уравнение (1) и прогнозировал неизвестную часть прибавки m. Что касается h, то мы предположим, что это некая фиксированная часть прибавки.

3.**Применение модели Башелье к прогнозированию стоимости опционов колл.**

Опцион колл - это стандартный биржевой договор, согласно которому продавец опциона обязуется продать покупателю через определенный срок базовый актив по зафиксированной в момент заключения сделки цене. Эта зафиксированная цена называется цена исполнения или цена страйк. Рыночная цена базового актива называется цена спот. Говорят, что опцион колл имеет внутреннюю стоимость или находится "в деньгах", если цена спот на текущий момент выше цены страйк. Если такая ситуация возникнет на момент окончания срока опциона, то покупатель почти гарантированно будет в плюсе (нет полной гарантии, поскольку цена спот должна превышать сумму цены страйк и премии). В случае, если цена спот на текущий момент меньше цены страйк, внутренняя стоимость опциона колл равна нулю (опцион "без денег"). Покупатель опциона в таком случае просто не исполняет опцион[11].

Опцион колл по механизму немного отличается от покупки ренты на срок, но движение денежных средств при опционе колл и ренте на срок абсолютно одинаковы. В момент заключения сделки покупатель выплачивает продавцу вознаграждение, в момент окончания продавец либо выплачивает разницу между спот и страйк, либо выкупает актив по цене заключения страйк. Соответственно, мы можем применить формулу (1) к оценке премии по опциону колл. Для этого мы несколько изменим обозначения.

Продавец опциона в любом случае получает сумму h+m. Мы может оценить h как внутреннюю стоимость опциона. Соответственно, m - это разница между фактической премией и внутренней стоимостью. Параметры нормального распределения остаются такими же, и так же, как Башелье, мы сначала оценим параметр k, а затем подставим его для нахождения m.При этом t так и остается периодом, оставшимся до окончания срока контракта.

После нахождения несобственных интегралов справа и слева, уравнение (1) можно переписать в следующем виде[2,3,4,7].

(2) $$h + \frac{1}{2}m + \frac{m^3}{8k^5\pi^2 t^{\frac{3}{2}}} - \frac{m^5}{64k^3\pi^3 t^{\frac{5}{2}}} + \frac{m^7}{272k^7\pi^4 t^{\frac{7}{2}}} = -2k\sqrt{t}\, e^{\frac{-m^2}{4k^2\pi t}}.$$

Остается подставить имеющиеся эмпирические данные в уравнение (2) и получить параметр k, а затем и рассчитать надбавку m. Отметим, что ввиду приближенного решения интеграла слева, мы несколько ограничены в своих возможностях. Уравнение (2) не решается если $m = 0$, то есть фактическая премия равна внутренней стоимости. В таблице 1 представлены необходимые для расчетов параметры некоторых российских опционов, а также рассчитанный по уравнению (2) параметр k.

Т*аблица 1. Параметры некоторых российских опционов на 12.01.2016*

Контракт	Страйк	Спот	Внутренняя стоимость, *h*	Разность фактической премии и *h*, *m*	Премия	Дней до исполнения, *t*	параметр *k*
NKH6 Новатэк	44000	54790	10790	810	11600	64	11,231
LKH6 Лукойл	17000	22793	5793	2	5795	8	512,122
RIH индекс РТС	100000	68860	0	6	6	9	0,832
SVH6 серебро	10	13	3	4	7	65	0,154

Параметр k был посчитан из уравнения (2). Теперь возьмем данные по тем же опционам на 22.01.2016 и подставим в уравнение (2) k, h и t. Полученное значение m сравним с фактической разностью премии и внутренней стоимости.

Таблица 2. Параметры некоторых российских опционов на 22.01.2016

Контракт	Страйк	Спот	Внутренняя стоимость, *h*	Разность фактической премии и h, m	Премия	Дней до исполнения, *t*	параметр *k*	*m* по модели
NKH6 Новатэк	50000	64530	14530	267	14797	44	11,231	260,7
LKH6 Лукойл	19000	25294	6294	1	6295	16	512,122	1,537
RIH6 индекс РТС	100000	72790	0	3	3	17	0,832	8,3
SVH6 серебро	10	14	4	0	4	45	0,154	-6

Обратим внимание, что по некоторым опционам дней до исполнения на 22 января остается больше, чем было на 12 января. Такая ситуация возникла, потому что контракты в промежуток с 12 по 22 января уже истекли, и были заключены новые контракты.

Сравним фактическую разницу между внутренней стоимостью и премией и m, полученную по модели. Во всех случаях они достаточно близки. В последнем опционе на 22 января премия стала равна внутренней стоимости, а разность по модели оказалась отрицательной. Но разницы на порядок не наблюдается ни в одном из случаев.

4.**Заключение**.

Из проведенного нами эксперимента можно сделать вывод о том, что теория Башелье работает и на современных опционах. Но существуют некоторые оговорки. В настоящее время на большинстве бирж (в том числе и на Московской бирже) премии по опционам рассчитываются по модели Блека -Шоулза [12]. Уже было упомянуто о том, что Блек и Шоулз, как и остальные создатели современной финансовой науки, опирались на исходные постулаты Башелье. А основной исходной предпосылкой Башелье было предположение о случайном характере движения биржевых цен[15].

Именно данная предпосылка и прославила Башелье. Резонно предположить, что во всех классических финансовых моделях, основанной на предположении о случайном движении цен, фигурирут нормальное распределение[15,17]. У Башелье плотность нормального распределения мы видим в уравнении (1).

Вспомним модель Блека - Шоулза [11,16].

(3) $$C = S\,N(d_1) - X\,e^{-r_f(T-t)}N(d_2)$$

$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right)+\left(r_f+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$,

$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$

где

C – премия по опциону колл,

S – цена спот на момент заключения сделки,

X – цена страйк,

$N(x)$ – табулированная функция нормального распределения,

σ^2 дисперсия базового актива,

T – период опциона,

t – время, прошедшее с момента заключения сделки,

r_f – безрисковая ставка.

Табулированная функция нормального распределения, например от d_1 выглядит следующим образом[5].

(4) $$N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Если раскрыть d_1 , то формула (4) будет похожа на интегралы из уравнения (1). Принципиальные отличия от уравнения (1) - это введение безрисковой ставки дисконтирования и логарифм относительной разницы цен спот и страйк. Поэтому можно сказать, что схожие результаты расчетов по модели Блека - Шоулза и по модели Башелье вполне объяснимы.

В данной работе мы хотели показать, что основы современной инвестиционной теории были заложены еще более 100 лет назад. работа Луи Башелье не была принята математиками того времени и была забыта почти на полвека. При этом его формулы работают и на современных инструментах с тем же успехом, что и общепризнанная модель Блека - Шоулза.

Литература

1. БОДИ, ЗВИ. *Принципы инвестиций: пер. с англ.* / Зви Боди, Алекс Кейн, Алан Маркус.– М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 984 с.
2. КОСОРУКОВ О.А. *Исследование операций. Учебник для вузов*// О.А. Косоруков, А. В. Мищенко. - М.: Экзамен, 2003. - 448 с.
3. КРАСС М.С. Высшая математика для экономистов// М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. - Спб.: Питер, 2004. - 464 с.
4. КРЕМЕР Н.Ш. *Высшая математика для экономистов*// Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин. – М.: ЮНИТИ-ДАНА,2007. –479 с.
5. МАНДЕЛЬБРОТ Б. (Не*)послушные рынки. Фрактальная революция в финансах*// Бенуа Мандельброт. Ричард Хадсон. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. – 400 с.
6. МАНДЕЛЬБРОТ Б. *Фракталы, случай и финансы*// Бенуа Мандельброт. – Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. – 256 с.
7. МАТЕМАТИКА: ЭНЦИКЛОПЕДИЯ// под ред. Ю.В. Прохорова. – М.: Большая Российская энциклопедия, 2003. –845 с.
8. МЛОДИНОВ Л. *Несовершенная случайность. Как случай управляет нашей жизнью*// Леонард Млодинов. - М.: Livebook/ Гаятри, 2011. - 352 с.
9. ПРОСВЕТОВ Г.И. *Математические методы и модели в экономике*// Г.И. Просветов. – М.: Альфа Пресс, 2008. –344 с.
10. СТРАННЫЕ АТТРАКТОРЫ. СБОРНИК СТАТЕЙ// Дж. Марсден и др. – М.: Мир, 1981. –251 с.
11. СТРИДСМАН ТОМАС. *Использование бета – коэффициента для выбора акций и управления риском* / Томас Стридсман // Современный трейдинг – 2001. – № 7. – с. 68 – 73.
12. СТЮАРТ И. *Играет ли бог в кости? Математика хаоса* //Иен Стюарт. – Basil Blackwell, Cambridge, MA, 1990. – 348 с.
13. УЭЗЕРОЛЛ Д. *Физика фондового рынка. Краткая история предсказаний непредсказуемого*// Джеймс Уэзеролл. - Пер. с англ. - Манн, Иванов и Фербер, 2013.

14. ХАЛЛ ДЖ. К. *Опционы, фьючерсы и другие производные инструменты*// Джон К. Халл. - М.: Издательский дом "Вильямс", 2008. - 1024 с.
15. ЧИСТЯКОВ В. П. *Курс теории вероятостей*// В.П. Чистяков. - М.: Наука, 1982. - 256 с.
16. ШАРП У. *Инвестиции / У. Шарп, Г. Александр,Д. Бэйли. Пер. с англ*// У. Шарп – М.: ИНФРА-М, 2009 г. – 1027 с. – (Серия «Университетский учебник»).
17. ШИРЯЕВ А.Н. *Вероятность*// А. Н. Ширяев. - М.: Наука, 1980. - 575 с.

BACHELIER ' S MODEL APPLICATON TO NODERN OPTION MARKET

Anna Zinenko, State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev, Krasnoyarsk, associated professor. Associated professor of "Finance and Credit" department (anna-z@mail.ru).

Abstract. Louis Bachelier's 1900 's work "Speculation Theory" was undeservingly forgotten . It was returned to the science word only after more than forty years. In the paper Bachelier analyzed french bonds market dynamics. These bonds were everlasting and period rent. In present that paper is considered to be the basis of modern financial investment theory. Bachelier's innovation is physical equations application to financial market dynamics and random quotes motions postulate. But Bachelier's followers miss the fact that the main subject of his research is period rent - prototype of call option - pricing model.

In the following paper we applied Bachelier's period rent equations to some russian modern call options and compared the results with actual call option prices.

Keywords: Normal distribution, everlasting rent, period rent, call option.